Jahrbuch Überblicke Mathematik 1983, 163–168

Jahrbuch
Überblicke
Mathematik
1983

Wie zuverlässig sind die Ergebnisse unserer Rechenanlagen?

von S.M. Rump

Mit dem Aufkommen preiswerter elektronischer Geräte in den letzten Jahren hat die Verbreitung von Rechenhilfsmitteln stark zugenommen. Vor etwa 10 Jahren kamen die ersten elektronischen Taschenrechner auf den Markt, welche zunächst nur die arithmetischen Grundoperationen ausführen konnten. Mit zunehmender Integration der Bausteine wurden diese Rechner immer leistungsfähiger und ihr Preis sank beständig. Während elektronische Taschenrechner vor 10 Jahren zwischen ein- und zweitausend DM kosteten, kann man heute gute Geräte für 20 – 30 DM erwerben.

Vor etwa 5 Jahren setzte eine zweite Welle mit den elektronischen Tischrechnern ein, welche in ihrer Leistungsfähigkeit häufig frühere Großrechenanlagen übertreffen. Diese Klasse von Rechengeräten wird heute gelegentlich auch als Heimcomputer oder Personal Computer bezeichnet. Auch hier wurde in den folgenden Jahren die Leistungsfähigkeit wesentlich gesteigert, während die Preise für derartige Anlagen ständig fielen und noch fallen. Die ersten elektronischen Tischrechenanlagen kosteten vor etwa 5 Jahren zwischen siebzig- und achtzigtausend DM. Heute kann man gut brauchbare Geräte schon für zwei- bis dreitausend DM erwerben.

Aufgrund der fortschreitenden Entwicklung auf dem Elektronikmarkt sind sowohl Taschen- wie Tischrechner heute weitgehend für jedermann erschwinglich. Eine bekannte Firma war in der Lage, innerhalb eines Jahres nach Ankündigung eines neuen Tischrechnermodelles in nur einem Lande über 200 000 Stück abzusetzen. Dies ist keineswegs ein Einzelfall.

Trotz dieser zunehmenden Verbreitung von Rechenhilfsmitteln ist bei vielen Rechneranwendern eine gewisse Rechnergläubigkeit anzutreffen. Was der Rechner als Ergebnis liefert, wird quasi als mathematisch bewiesen akzeptiert. Häufig löst man großes Erstaunen aus, wenn man Rechnerbenutzer darauf hinweist, daß selbst bei einfachen Rechnungen mit nur wenigen Operationen völlig falsche Ergebnisse produziert werden können, und daß dies bei den heute verbreiteten Rechentechniken völlig zwangsläufig ist.

Die folgenden Beispiele sollen wieder einmal die an sich bekannte Tatsache illustrieren, mit wie wenig Operationen es möglich ist, einem Rechner völlig widersinnige Ergebnisse zu entlocken. Diese Aussage gilt keineswegs nur für Kleinrechner, sondern in gleichem Umfang auch für die großen und Größtrechenanlagen. Die besondere Tücke dieser Effekte liegt darin, daß man bei langwierigen Rechnungen in der Regel nicht weiß, ob, wann und wo sie auftreten.

Die Leser werden ausdrücklich ermuntert, die folgende kleine Beispielsammlung einmal auf ihren Taschen-, Tisch- und/oder Großrechenanlagen durchzurechnen.

Mit diesen Beispielen wird eine Problematik angesprochen, welche an sich jedem Rechneranwender vertraut sein sollte. Ähnliche Beispiele sollten eigentlich in keiner Rechneranleitung und in keinem Rechnerhandbuch fehlen.

Für den Fachmann sei noch angemerkt, daß erst in den letzten Jahren eine Entwicklung eingesetzt und zu Erfolgen geführt hat, Methoden, Techniken und allgemeine Lösungsverfahren zu entwickeln, welche diese Effekte nicht nur mathematisch beschreiben, sondern auch numerisch beherrschen.[1]

1. Man berechne den Wert von

$$p^2 - 2q^2$$

für $p = 665\,857$ und $q = 470\,832$.
Der korrekte Wert des Ausdruckes ist 1.

2. Man berechne den Wert von

$$9x^4 - y^4 + 2y^2$$

für $x = 10\,864$ und $y = 18\,817$.
Der korrekte Wert des Ausdruckes ist 1.

3. Man berechne den Wert von

$$a + b - a$$

für $a = 10^{34}$ und $b = -2$.
Der korrekte Wert des Ausdruckes ist -2.

4. Man berechne den Wert von

$$p(x) = 170.4 \cdot x^3 - 356.41 \cdot x^2 + 168.97 \cdot x + 18.601$$

für $x = 1.091608$.
Der korrekte Wert des Polynoms ist $8.21248 \cdot 10^{-14}$.

[1]Ein einfacher Zugang zu diesen Untersuchungen wird vermittelt in: „Wissenschaftliches Rechnen und Programmiersprachen", Hrsg. U. Kulisch/Ch. Ullrich, Berichte des German Chapter of the ACM, Band 10, Teubner Verlag (1982). Dort finden sich auch weitere Literaturangaben.

5. Man berechne den Wert von

$$p(x) = 8118 \cdot x^4 - 11482 \cdot x^3 + x^2 + 5741 \cdot x - 2030$$

für $x = 0.707107$.
Der korrekte Wert des Polynoms ist $-1.91527325270\ldots \cdot 10^{-11}$.

6. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 64919121 \cdot x - 159018721 \cdot y &= 1 \\ 41869520.5 \cdot x - 102558961 \cdot y &= 0. \end{aligned}$$

Korrekte Formeln zur Berechnung von x und y sind

$$y = (41869520.5/64919121)/(102558961 - 41869520.5 \cdot \cdot 159018721/64919121)$$

$$x = (102558961/41869520.5) \cdot y$$

Die korrekten Werte der Lösung sind

$$\begin{aligned} x &= 205117922 \\ y &= 83739041. \end{aligned}$$

7. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -367296 \cdot t - 43199 \cdot u + 519436 \cdot v - 954302 \cdot w &= 1 \\ 259718 \cdot t - 477151 \cdot u - 367295 \cdot v - 1043199 \cdot w &= 1 \\ 886731 \cdot t + 88897 \cdot u - 1254026 \cdot v - 1132096 \cdot w &= 1 \\ 627013 \cdot t + 566048 \cdot u - 886732 \cdot v + 911103 \cdot w &= 0. \end{aligned}$$

Die korrekten Werte der Lösung sind

$$\begin{aligned} t &= 8.86731088897 \cdot 10^{17} \\ u &= 8.86731088897 \cdot 10^{11} \\ v &= 6.27013566048 \cdot 10^{17} \\ w &= 6.27013566048 \cdot 10^{11}. \end{aligned}$$

8. Hat das Polynom aus Beispiel 4 positive Nullstellen? Die korrekte Antwort ist ja. ($x = 1.091607978\ldots$ und $x = 1.091607981\ldots$).

9. Man berechne die Werte des Polynoms

$$p(x) = 223200658 \cdot x^3 - 1083557822 \cdot x^2 + 1753426039 \cdot x - 945804881$$

für x zwischen 1.61801916 und 1.61801917 in Abständen von 10^{-9}, also 11 Werte insgesamt. Gibt es eine Nullstelle zwischen diesen beiden Werten?

Die korrekten Ergebnisse sind

$P(1.618019160) = -0.17081105112320 \quad D-11$
$P(1.618019161) = -0.89804011575510 \ldots D-12$
$P(1.618019162) = -0.34596536943057 \ldots D-12$
$P(1.618019163) = -0.51884933054474 \quad D-13$
$P(1.618019164) = -0.15797467422848 \quad D-13$
$P(1.618019165) = -0.23770163333175 \quad D-12$
$P(1.618019166) = -0.71759609157723 \ldots D-12$
$P(1.618019167) = -0.14554795029553 \ldots D-11$
$P(1.618019168) = -0.24513505282621 \ldots D-11$
$P(1.618019169) = -0.37052078282936 \ldots D-11$
$P(1.618019170) = -0.52170500638460 \quad D-11$

Der erste, vierte, fünfte, sechste und elfte Polynomwert ist exakt.

10. Es seien drei Wertepaare (x, y) gegeben:

x	5201477	5201478	5201479
y	99999	100000	100001

Offenbar liegen die drei Werte auf einer Geraden. Für eine beste lineare Kurvenanpassung $L(x) = mx + b$ gilt

$$m = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2} \quad \text{und}$$

$$b = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) - \frac{m}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Man berechne die Werte von m, b und $L(5201480)$.

Die korrekten Ergebnisse sind $m = 1$, $b = -5101478$ und $L(5201480) = 100002$.

11. Welche positive(n) reelle(n) Nullstelle(n) hat das Polynom

$$2124476931 \cdot x^4 - 1226567328 \cdot x^3 - 708158977 \cdot x^2 + 408855776 \cdot x + 1E-27?$$

Die korrekte Lösung ist: Das Polynom besitzt keine positiven reellen Nullstellen.

12. Die Komponenten der Hilbert-Matrix sind definiert als

$$H_{ij} := 1/(i+j-1).$$

Um die Komponenten der Hilbert-Matrix mit n Zeilen ganzzahlig zu machen, multipliziert man die Komponenten mit $kgV(1, 2, \ldots, 2n-1)$. Die größte so erhaltene Matrix H^*, die noch exakt in binären Gleitpunkt-Zahlen mit 24 bit Mantisse speicherbar ist, hat 9 Zeilen. Sie heiße $H_9{}^*$.

Man berechne erste Komponente der ersten Zeile der Inversen der Matrix $H_9{}^*$.

Die korrekte Lösung ist $6.611036022800 \ldots \cdot 10^{-6}$.

13. Die größte Matrix H, die noch exakt in binären Gleitpunktzahlen mit 54 bit Mantisse speicherbar ist, hat 21 Zeilen.

Man berechne die erste Komponente der ersten Zeilen der Inversen der Matrix H_{21}^*.

Die korrekte Lösung ist $2.013145339298 \ldots \cdot 10^{-15}$.

14. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$64079x + 57314y = 2$$
$$51860x + 46385y = 305.$$

Die korrekte Lösung lautet

$$x = -46368$$
$$x = 51841.$$

15. Es sei

$$f(t) := \frac{4970 \cdot t - 4923}{4970 \cdot t^2 - 9799 \cdot t + 4830}$$

Eine Näherung für $f''(x)$ ist

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2 \cdot f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

Man berechne eine Näherung für $f''(1)$ mit obiger Formel für $h = 10^{-4}$, $h = 10^{-5}$ und $h = 10^{-8}$.

Die richtigen Werte sind

Approximation mit $h = 10^{-4}$: 70.78819...
Approximation mit $h = 10^{-5}$: 93.76790...
Approximation mit $h = 10^{-8}$: 94.00000....

Der exakte Wert der zweiten Ableitung ist $f''(1) = 94$.

16. Man berechne den Wert von

$$83521 \cdot y^8 + 578 \cdot x^2y^4 - 2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^6 - x^8$$

für $x = 9478657$ und $y = 2298912$.

Der korrekte Wert des Ausdrucks ist -179689877047297.0.

Was erhält man bei Ausführung auf dem Taschenrechner? Auf einer Großrechenanlage?

17. Man berechne das folgende Skalarprodukt

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5$$

für

$$\begin{array}{llll} a_1 = & 2.718281828 & b_1 = & 1486.2497 \\ a_2 = & -3.141592654 & b_2 = & 878366.9879 \\ a_3 = & 1.414213562 & b_3 = & -22.37492 \\ a_4 = & 0.5772156649 & b_4 = & 4773714.647 \\ a_5 = & 0.3010299957 & b_5 = & 0.000185049 \end{array}$$

Der korrekte Wert des Ausdrucks ist $-1.00657107 \cdot 10^{-11}$.

18. Wir wiederholen noch einmal das Beispiel von der Umschlagseite:

Wie lautet der Wert des folgenden Ausdrucks

$$(1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832)/107751$$

für $x = 192119201$ und $y = 35675640$?

Was erhält man bei Ausführung der Operationsfolge auf einem Taschenrechner? Auf einer Großrechenanlage?

Den korrekten Wert des Ausdrucks finden Sie ebenfalls auf der hinteren Umschlagseite.

Dr. Siegfried M. Rump
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Kaiserstr. 12
7500 Karlsruhe